

# 유한요소법을 이용한 컴퓨터 시뮬레이션과 그 응용

(Computer Simulation Using Finite Element Method and It's Applications)

이 수길\*, 김 도영\*, 김 충혁\*\*, 이 준웅\*\*\*

\* : 광운대학교 전기공학과 석사과정  
\*\* : 광운대학교 전산원 전임강사  
\*\*\* : 광운대학교 전기공학과 교수

## 목차

- I. 서론
- II. 관계이론
  - II-1. 유한요소법의 개요
  - II-2. 요소분할과 형태
  - II-3.  $\Omega$  영역에서의 요소함수
- III. 유한요소법의 응용분야
- IV. 유한요소법의 적용예
- V. 결론
- VI. 참고문헌

에 유한요소법을 이용하여 물질의 전기적 특성을 분석한 논문들이 다수 보고되고 있는 실정이다.

본 해설에서는 유한요소법의 기본적인 개념을 소개하고 컴퓨터를 이용한 시뮬레이션 실용예를 제시하였다.

## II. 관계이론

### II-1. 유한요소법의 개요

일반적으로 공학에서 언급하는 물리적인 현상들은 매우 복잡한 분포특성을 가진 연속적인 현상이라 할수 있는데 이러한 물리적 현상은 수학적 표현으로 나타낼수 있다. 이 수학적 표현을 지배방정식(Domain Equation)이라 한다. 예를들어 전자기분야에서의 지배방정식은 Poisson의 방정식과 Maxwell 방정식등을 들수 있다.

유한요소법에서는 이들 방정식의 근사함수(범함수)를 설정하고 해석하고자 하는 전체영역을 유한개의 요소로 분할한 후 각각의 요소에 대해 주어진 문제에 적합한 근사식을 세우고 적합한 적분을 이용하여 각각의 분할된 요소의 매트릭스해석을 연속적인 분포함수로 연계시키므로써 전체적인 해석영역의 물리적 특성을 구할수있다. 해석의 오차는 요소분할의 정도에 따라 충분히 정밀도를 변화시킬수 있고 그 정밀도는 컴퓨터의 처리속도를 고려하여 조절하여야한다.

### II-2. 요소의 분할과 형태

유한요소법에서 각각의 요소를 분할하는 이유는 임의의 구조물을 유한개로 분리시켜서 수학적 해석을 간단히 하기위한데 분할방법에는 1차원, 2차원, 3차원분할방법이 있다.

#### 가) 1차원요소

소요분할중 가장 간단한 요소로 단면적을 가진 선요소이다. 직선에서 각 양단

## I. 서론

최근 전기. 전자공학의 급속한 발전은 컴퓨터 기억용량의 극대화와 처리 시간의 단축을 가능하게 하여 복잡한 여러 공학분야에서 연구대상물의 해석과 그 결과의 시각화에 컴퓨터를 효과적인 도구로 사용할 수 있게 해주었으며 이와 어울러 컴퓨터를 이용한 수치해석도 비약적인 발전을 거듭하였다.

일반적으로 컴퓨터를 이용한 해석방법이란 실질적인 실험을 하기 이전에 그 실험의 특성적인 요소를 파악하고 그 요소변화에 알맞는 모의실험(Simulation)을 통하여 실험으로 얻을 수 있는 여러 사실들을 미리 예측, 실험의 최적화를 피하는 방법을 말한다.

이 모의실험에 가장 빈번히 사용되고 있는 방법중의 하나인 유한요소법은 1950년도에 항공기 동체의 강도와 공기의 흐름을 유체역학적으로 해석하기 위해 도입되었으나 점차 다른 분야에서의 유용성을 인정받아 토목공학, 건축공학, 기계공학등에 이용되었으며 1970년대부터는 전기. 전자공학 분야의 전계, 자계등의 계산에 유한요소법을 적용함으로써 복잡한 대상을 보다알기 쉽고 정확하게 분석할 수 있는 길을 열게 되었다. 현재는 미국이나 일본등의 저널

에 절점을 가지고 절점이 2개로 2절점 요소이다. 또한 형태가 곡선이라면 근사적으로 분할하여 해석할수있다.



그림 1. 1 차원 요소

나) 2차원요소

2차원 영역의 형태를 구성하는 2차원 요소는 주로 사변형요소와 삼각형요소로 이루어진다. 이외에도 사각형요소가 있지만 이것은 특별한 경우이다. 임의의 형태에 대한 요소분할에 있어서 삼각형 사변형요소가 가장 분할하기 용이한 형태이다.

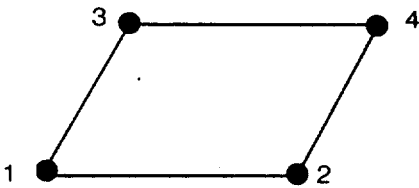


그림 2. 2 차원 요소

다) 3차원요소

2차원요소를 확대 해석하여 3차원요소를 설명할수있는데 3차원요소에서 선형 요소는 경계면은 평면이고 2차, 3차요소 등은 평면, 곡면 그리고 이들을 동시에 포함할수있다. 또한 사면체요소와 각주 요소로 분할하는것이 적합하다.

각 분할법의 선택과 그 분할에 있어서의 정밀도는 수학적 계산처리속도와 분할요소정도에 따른 최적결과를 위하여 절충이 필요하다.

그림 1에서는 요소분할시 정밀도를 달리하는 각 경우의 해석에 필요한 매트릭스의 차원을 나타내고있다. 요소분할을 세밀하게 할수록 해의 정확도는 높아지나 해를 구하기위해 사용하는 매트릭스의 차원이 높아져서 계산시간의 증가를 가져오게되어 해석의 정확도와 계산시간(혹은 메모리용량)과는 반비례적인 관계가있다.

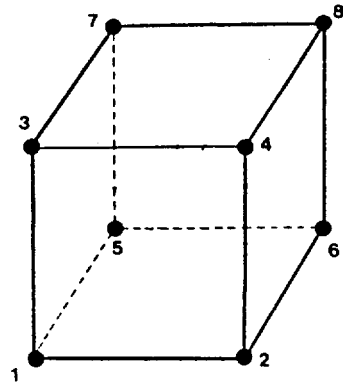


그림 3. 3 차원 요소

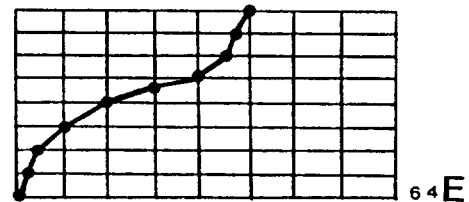
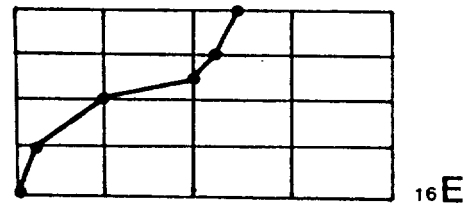
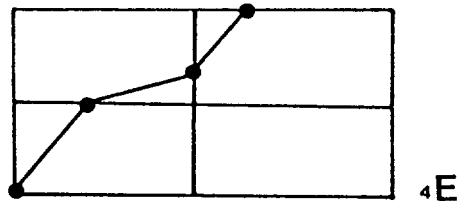
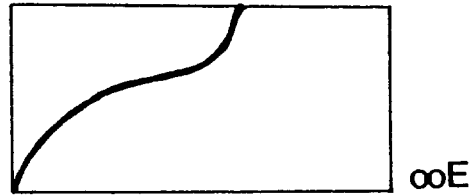


그림 4. Multi-Level 2차원 요소분할과 해석 매트릭스의 차원

II-3. Ω 영역에서의 요소함수

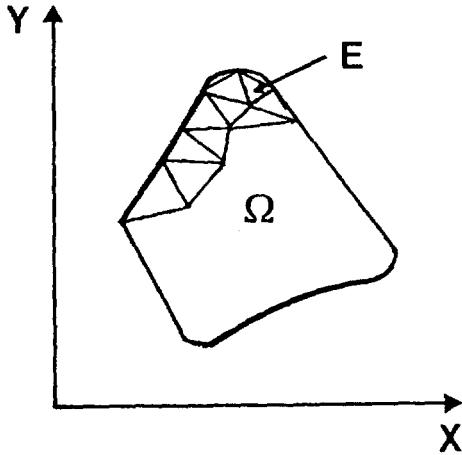


그림 5. 영역 Ω

Ω: 전체 해석영역

E: Ω 영역 내의 요소

그림 5와 같은 임의의 영역 내의 지배방정식을 다음식으로 나타낸다.

$$A\phi - f = 0 \quad \text{--- (1)}$$

여기서 A : constant  
 ϕ : Potential  
 f : Input function 이다

지금 경계조건을

$$\phi = q(x, y, z) \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + a\phi + B = 0 \quad \text{--- (3)}$$

라 할때 경계조건 (2), (3)은 고정경계 조건, 자연경계조건이라 하는데, 이조건을 만족하는 지배방정식의 범함수 I 는 일반적으로

$$I(\phi) = A(\phi, \phi) - 2f\phi \quad \text{--- (4)}$$

로 표시할수 있는데 이 식은 일반적인 함수로 표현한 식이다.

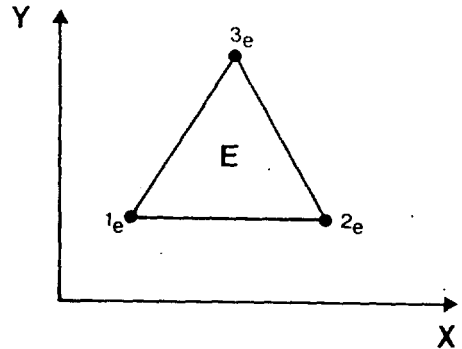


그림 6. 2차원 삼각형요소

- E : 요소 (Element) 의 두문자
- 1e: 삼각형요소E의 절점1 (node 1)
- 2e: 삼각형요소E의 절점2 (node 2)
- 3e: 삼각형요소E의 절점3 (node 3)
- (xi yi) : 2차원내에서의 좌표 (i=1, 2, 3)

식 (1)의 지배방정식을 그림 6과 같이 2차원 삼각형요소를 사용하여 분석해보면 요소의 포텐셜과 지배방정식의 형태 함수는 다음과 같이 나타낼수있다.

$$\phi = \alpha_{10} + X\alpha_{20} + Y\alpha_{30} \quad \text{--- (5)}$$

식 (5)를 행렬로 나타내면,

$$\phi = [1 \ X \ Y] \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{30} \end{bmatrix} \quad \text{--- (6)}$$

에서 식 (5)와 (6)은 2차원 삼각형요소에 대한 연속적인 포텐셜의 다항식이다. 이를 각 절점에 대한 다항식으로 표현하면

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \alpha_{10} + \alpha_{20}X_1 + \alpha_{30}Y_1 \\ \phi_2 &= \alpha_{10} + \alpha_{20}X_2 + \alpha_{30}Y_2 \\ \phi_3 &= \alpha_{10} + \alpha_{20}X_3 + \alpha_{30}Y_3 \quad \text{--- (7)} \end{aligned}$$

이 된다. 이를 매트릭스로 나타내면 식 (6)의 형태와 같이

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{30} \end{bmatrix} \quad \text{--- (8)}$$

이 되고 또 식 (8) 에서  $[\alpha]$  행렬을 구해 보면,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \\ \alpha_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad \text{--- (9)}$$

와 같은 값을 얻을 수 있다. 이 식 (9) 를 식 (6) 에 대입하여 전체 포텐셜의 행렬을 구하면 식 (10) 과 같다.

$$\phi = [1 \ X \ Y] \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^3 N_{i0}(x,y) \phi_{i0} \quad \text{--- (10)}$$

여기서  $\phi_{ie}$  는 각 절점의 포텐셜이고  $N_{ie}(x,y)$  는 형태함수 (Shape function) 이다. 이는 어떤 요소에서든지 적용할 수 있는 함수이다.

$$N_{i0}(x,y) = [1 \ X \ Y] \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ 1 & X_3 & Y_3 \end{bmatrix}^{-1} \quad \text{--- (11)}$$

식 (11) 은 2차원 삼각형 요소의 형태 매트릭스이다.

식 (10) 을 식 (4) 에 대입하면

$$[I] = \sum_{e=1}^s [K^e] [\phi^e] + [F^e] = [0] \quad \text{--- (12)}$$

이 된다. 여기서  $\phi^e$  은 전체 해석장의 전포텐셜이고,  $[F^e]$  는 입력행렬,  $[K^e]$  는 전요소 포텐셜의 극소점행렬이다. 결국 식 (12) 를 다시 쓰면,

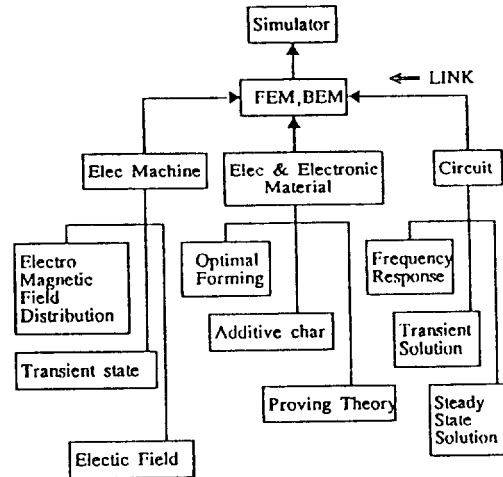
$$[I] = [K] [\phi] + [F] = [0] \quad \text{--- (13)}$$

식 (13) 에서  $[\phi]$  를 구할 수 있고, 이 포텐셜로부터 물리적 개념을 도출할 수 있다.

## I. 유한요소법의 응용분야

유한요소법의 응용은 건축, 토목, 기계, 재료공학등 여러분야가 있으나 전기, 전자공학분야에서는 주로 전기기계에서 전자장을 해석하는데 광범위하게 응용되어 왔으며 특히 정지기에서의 전위분포특성을 이용한 절연내력의 보상이나 회전기에서의 과도특성해석등에도 많은 연구가 이루어져 왔다.

최근에 재료의 특성분석이론에 이들 이론의 응용가능성을 보여주는 여러 분석과 해석방법이 연구 보고되고 있으며, 그중에서도 제품의 형상에 따른 특성분석 (CAD) 과 최적유전체재료를 생산하는데 첨가물이나 처리과정등의 영향을 예측하는 Simulator의 구현의 연구가 이루어지고 있다. 특히전도기구의 해석을 통한 특성분석은 재료의 전도기구에 동일성을 부여하기 힘든 점을 고려할때 유한요소법의 접목을 통한 모델링이 보다 효과적일 것으로 보이며 신소재의 개발에도 크게 기여할것으로 예상된다. 이들 Simulation과정을 통한 응용분야를 예를 들면 그림 7과 같다.



\* FEM : Finite Element Method  
BEM : Boundary Element Method

그림 7. 응용분야

## II. 유한요소법의 적용예

① Inhomogeneous Poissonian Fields (불균일 포아송장)에서의 적용예

임의의 불균일 포아송장내에서 Electric Potential (전위) 분포를 알아 본다.

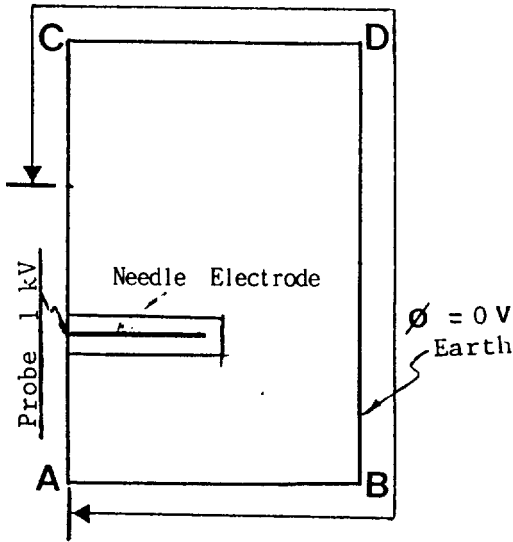


그림 8. 원형도

그림 8 은 Probe로부터 Plate로 방전되는 현상을 해석하기 위해서 2차원 측면도를 그린것이다. 이 원형도를 해석하기 위하여 지배방정식을 도입해보면

$$-\nabla\phi = \vec{E} \quad \text{--- (14)}$$

가 되고 이 지배방식의 에너지 적분형은

$$I(\phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (-\nabla\phi) \cdot \epsilon (\nabla\phi) d\Omega - \int_{\rho} \phi d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} h \phi d(\partial\Omega) \quad \text{--- (15)}$$

이 되어 전체의 스칼라 포텐셜을 구할 수 있다. 여기서  $\phi$ 는 Electric Potential이다. 그림 8을 요소분할하면 그림 9와 같다.

그림 9와 같이 전체영역  $\Omega$ 를 유한개의 요소로 나눌수 있으며 이 요소에대한 스칼라 포텐셜을 구한 그림 10은 등전위곡선으로 전위분포를 나타낼수 있다.

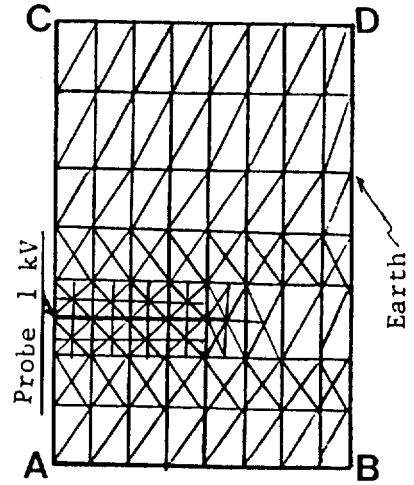


그림 9. 요소 분할도

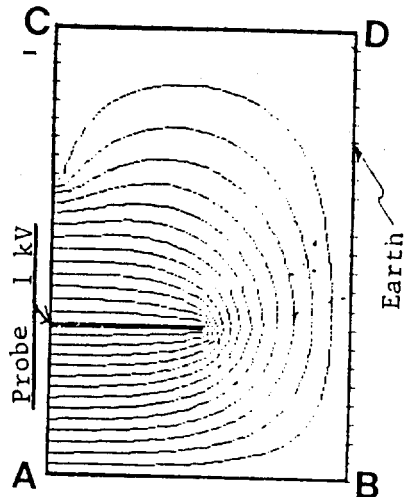


그림 10. 스칼라 포텐셜

그림 10에서 전위분포를 살펴보면 Probe 주변에서는 전위의 변화가 급격하고 접지면으로 갈수록 그 변화가 완만하다.

이것을 전체의 분포로 나타내면 그림 11과 같은 결과를 얻을수 있는데, 이 그림으로부터 Probe주변내에서의 전체분포를 예측할수 있어 절연내력 보상에 응용할수 있다.

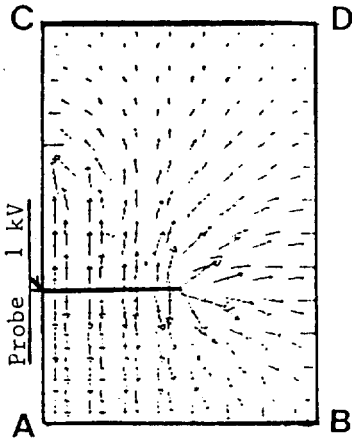


그림 11. 전계 분포

② 전기 전자 재료의 적용예

N-Channel MOSFET 반도체에서의 Electrostatic Potential Distribution (정전계 전위분포)를 계산하여 보자.  
 먼저 반도체 소자의 지배방정식을 구해보면 영역내가 정상상태인 경우에서 흐르는 캐리어의 Curl 방정식 (16)과 Divergence 방정식 (17)은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times E &= 0 \\ \nabla \times J &= J \times E \end{aligned} \right\} \text{--- (16)}$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \Phi &= \rho / \epsilon_s \\ \nabla \cdot \Phi &= q R \end{aligned} \right\} \text{--- (17)}$$

E는 전계의 세기이고  $\rho$ 는 net 전하밀도이고 R은 generation과 recombination의 net비이며, q는 전자의 전하량이다.  
 식 (16)에서 해를 구하면

$$\left. \begin{aligned} E &= -\nabla \Phi \\ J &= qn\mu_n E + qD_n \nabla n \end{aligned} \right\} \text{--- (18)}$$

식 (18)은 반도체 영역의 지배방정식이다. 이 지배방정식을 이용하여 범함수를 구하고 그 해를 구하여 반도체내의 전계분포를 예측, 반도체 설계보상에 응용할수 있다.

그림 12는 N-Channel MOSFET의 요소분할을, 그림 13에서는 해석된 Electrostatic Potential 분포를 이상과 같은 방법으로 구한 결과이다.

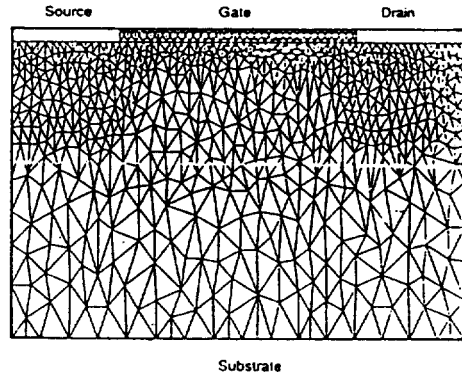


그림 12. 요소분할도

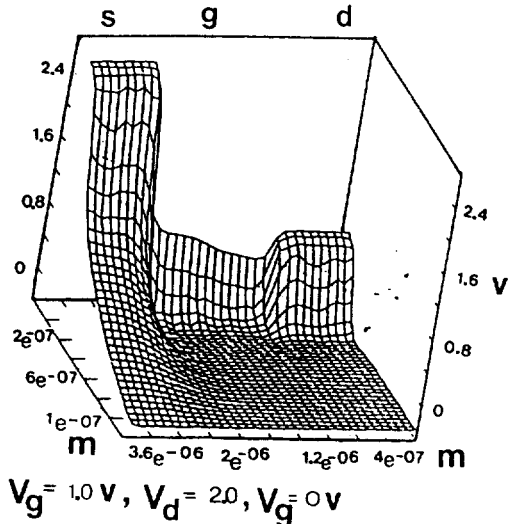


그림 13. MOSFET의 Electrostatic Potential 분포